

# 流-势函数法的人工密度格式 在叶型设计中的应用

西北工业大学 刘 波

## 摘 要

本文采用流-势函数法进行跨音速叶型设计,用人工密度格式取代类型相关格式。与相关格式相比,人工密度格式具有全场算法统一、收敛过程稳定等优点。本文提供的设计算例表明,该方法能有效地进行叶型的初始工程设计。

## 一、前 言

采用给定叶片表面速度分布来设计叶型的方法,可以使型面与气流参数分布有机地结合起来。设计者可以在较宽广的范围内选择所需要的速度分布,并设计出对应的叶型。可控扩散叶型(CDA)的设计正是采用了这种方法,首先由附面层分析得出优化的速度分布,然后采用某种设计方法得出对应的叶型。这种CDA叶型与常规叶型相比具有损失小、负荷高、工作范围宽等优点,已在实际发动机上使用。

目前用于跨音速叶型设计的主要方法有:流-势函数法<sup>[1]</sup>、复特征线法<sup>[2]</sup>、以及虚拟气体法<sup>[3]</sup>等。几种方法相比,流-势函数法最为简便,适用范围也较广。

本文采用流-势函数法的人工密度格式进行跨音速叶型设计。算例表明:与文献<sup>[1]</sup>中超音区采用的上风格式相比,具有全场算法统一,收敛过程稳定、迅速等优点。

## 二、控制方程和差分格式

在图1所示物理面X、Y坐标系下,二维定常势流的连续方程和无旋条件为:

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (1)$$

$$u_y - v_x = 0 \quad (2)$$

全速度 $q$ 在 $x$ 、 $y$ 方向的分速为, $u = q \cos \theta$ ,  
 $v = q \sin \theta$ ,  $\rho$ 为气体静密度。采用坐标变换公式:

$$\partial(\quad)/\partial x = q \cos \theta \partial(\quad)/\partial \varphi - \rho' q \sin \theta \partial(\quad)/\partial \psi \quad (3)$$

$$\partial(\quad)/\partial y = q \sin \theta \partial(\quad)/\partial \varphi + \rho' q \cos \theta \partial(\quad)/\partial \psi \quad (4)$$

可将方程(1)、(2)变为流-势函数 $\varphi$ - $\psi$ 计算坐标系下的形式:

$$\partial(\rho' q)/\partial \varphi + \partial \theta / \partial \psi = 0, \quad \rho' \partial q / \partial \psi - \partial \theta / \partial \varphi = 0$$

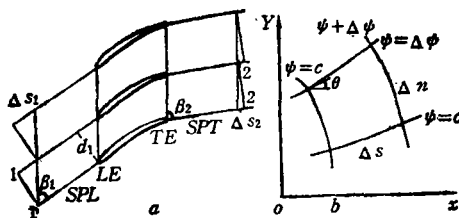


图1 叶栅求解物理域(a)和坐标转换  
(b) ( $\theta$ 为气流方向角)

消去气流角 $\theta$ 后,引入临界音速 $a_{cr}$ ,可得速度系数 $\lambda$ 的求解方程为:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho' \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho'^2} \frac{\partial \rho'}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\rho'}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (5)$$

其中:  $\lambda = q/a_{cr}$ ,  $q^2 = u^2 + v^2$ ,  $\rho' = \rho/\rho^* = [1 - (k-1)\lambda^2/(k+1)]^{1/(k-1)}$

将方程(5)中各阶偏导数项均用中心差分格式在 $(i, j)$ 点离散

(图2), 整理后得:

$$A\lambda_{i,j+1} + B\lambda_{i,j} + C\lambda_{i,j-1} + D\lambda_{i+1,j} + E\lambda_{i-1,j} = F \quad (6)$$

其中:  $A = \rho'_{i,j+1/2}/(\lambda_{i,j+1/2}\Delta\psi^2)$ ,  $C = \rho'_{i,j-1/2}/(\lambda_{i,j-1/2}\Delta\psi^2)$

$$D(\rho_{i+1/2,j}\lambda_{i+1/2,j}\Delta\varphi^2)^{-1}, \quad E(\rho_{i-1/2,j}\lambda_{i-1/2,j}\Delta\varphi^2)^{-1},$$

$$B = -(A + C + D + E)$$

$$F = (\rho'_{i,j} - \rho'_{i-1,j})/(\rho'^2_{i-1/2,j}\Delta\varphi^2) - (\rho'_{i+1,j} - \rho'_{i,j})/(\rho'^2_{i+1/2,j}\Delta\varphi^2)$$

下标带有“ $\pm 1/2$ ”的量用平均方法计算,并用 $f$ 代表 $\lambda$ 或 $\rho'$ ,即

$$f_{i\pm 1/2,j} = (f_{i\pm 1,j} + f_{i,j})/2, \quad f_{i,j\pm 1/2} = (f_{i,j\pm 1} + f_{i,j})/2$$

最后将方程(8)写成三对角矩阵形式,以便用追赶法求解。

$$A^{(n)}\lambda_{i,j+1}^{(n+1)} + B^{(n)}\lambda_{i,j}^{(n+1)} + C^{(n)}\lambda_{i,j-1}^{(n+1)} = F^{(n)} \quad (9)$$

$$F^{(n)} = F^{(n)} - D^{(n)}\lambda_{i+1,j}^{(n)} - E^{(n)}\lambda_{i-1,j}^{(n)}$$

### 三、密流比修正和环量校核

采用如下的人工密度修正式<sup>[4]</sup>:

$$\bar{\rho}'_{i,j} = \rho'_{i,j} - v_{i,j}(\rho'_{i,j} - \rho'_{i-1,j}) \quad (10)$$

$$v_{i,j} = 0, \lambda < 1; \quad v_{i,j} = \alpha(1 - (1/\lambda^2)_{i,j})\lambda \geq 1 \quad (1 \leq \alpha \leq 2)$$

当 $v_{i,j} > 1$ 时,令 $v_{i,j} = 1$ ,于是在 $(i, j)$ 点的人工密度值介于 $(i, j)$ 和 $(i-1, j)$ 两点真实密度值之间,当 $\lambda \gg 1$ 时,其值接近于上游点气流密度;当 $\lambda < 1$ 时, $v_{i,j} = 0$ ,不进行密度修正。

开关函数 $v$ 的大小对数值解的精度和稳定性有强烈影响。在超音区内,如 $v$ 过小,会引起解的不稳定,如 $v$ 过大,则人工加入的粘性耗散影响过大,使激波抹平间隔过宽,影响解的精度。故应恰当选择系数 $\alpha$ 值,以控制 $v$ 的大小。

考虑到流管收缩、附面层和尾迹位移的三元影响,可引入轴向速度密流比 $\Omega$ 加以修正。

叶栅在物理面上的求解域变换到 $\varphi$ - $\psi$ 计算面上的无量纲(用上标“ $'$ ”表示)边界条件为:

上游(1—1)截面:  $\lambda(\psi') = \lambda_1$ ,  $\beta(\psi') = \beta_1$ ,  $\psi' = 0 \sim 1$

下游(2—2)截面:  $\lambda(\psi') = \lambda_2$ ,  $\psi' = 0 \sim 1$

上边界流线:  $\lambda_p = \lambda_p(\psi')$ ,  $\varphi' = 0 \sim \varphi'_{2p}$

下边界流线:  $\lambda_s = \lambda_s(\varphi')$ ,  $\varphi' = 0 \sim \varphi'_{2s}$

周期性边界上应保证对应点速度分布相同。

在出口(2—2)截面上,可先给定 $\beta_2$ 初值,然后依流量连续方程和库塔条件确定之。

为使两条边界流线终点的势函数相等,须调整叶片表面弧长和速度分布,以保证 $\varphi'_{2s} =$

$\varphi'_{2p}$ , 速度环量按下式计算:

$$\text{环量 I: } \Gamma_1 = \bar{t}(\lambda_1 \cos \beta_1 + \lambda_2 \cos(\pi - \beta_2))/d_L \quad (11)$$

$$\bar{t} = t[1.0 + (1.0/\Omega)]/2$$

$$\text{环量 II: } \Gamma_2 = \oint_{\text{叶片轮廓}} \lambda(s') ds' = (\varphi'_{TE} - \varphi'_{LE})_s - (\varphi'_{TE} - \varphi'_{LE})_p \quad (12)$$

#### 四、叶栅物理坐标确定

三对角方程组 (9) 为线性内点差分方程组, 可用追赶法求解, 得出每列各点的  $\lambda_{i,j}$ , 后, 进行如下的列松弛:  $\lambda_{i,j}^{(n+1)} = \lambda_{i,j}^{(n)} + \omega(\lambda_{i,j}^{(n+1)} - \lambda_{i,j}^{(n)})$

$$\text{收敛准则为: } \left| \frac{\lambda_{i,j}^{(n+1)} - \lambda_{i,j}^{(n)}}{\lambda_{i,j}^{(n)}} \right| < \varepsilon$$

通常  $\varepsilon$  可取  $10^{-3} \sim 10^{-5}$ , 对于  $120 \times 25$  的计算网格, 取  $\varepsilon = 10^{-5}$  时, 迭代 200~300 步即可收敛, 松弛因为  $\omega$  可在 0.5 左右选取。收敛后, 可由下式求速度方向角场:

$$\theta(\psi') = - \int_{\varphi'=c} (\rho' \partial \lambda / \partial \varphi' + \lambda \partial \rho' / \partial \varphi') d\psi' / \rho'^2 \lambda \quad (13)$$

$$\theta(\varphi') = \int_{\psi'=c} (\rho' \partial \lambda / \partial \psi') d\varphi' \quad (14)$$

最后确定叶栅流场的无量纲物理坐标, 令  $\Delta\psi_1 = \rho' \lambda_1$ , 公式如下, 详细求解参阅文献(1)。

$$X' = \Delta\psi_1 \int_{\varphi'=c} \cos \theta d\varphi' / \lambda = - \Delta\psi_1 \int_{\varphi'=c} (\sin \theta / \rho' \lambda) \quad (15)$$

$$Y' = \Delta\psi_1 \int_{\varphi'=c} \sin \theta d\varphi' / \lambda = \Delta\psi_1 \int_{\varphi'=c} (\cos \theta / \rho' \lambda) \quad (16)$$

#### 五、叶型设计算例及讨论

给定叶型设计所需要的进、出口边界条件和叶片表面速度系数  $\lambda$  沿弧长的分布 (见图3), 再给定叶栅稠度后, 即可编程进行叶型设计。为了验证本方法设计叶型的精度和适用范围, 共设计了三套叶型叶栅。

1. 西德 DFVLR 研究所的大弯度超临界压气机叶栅 SKG2.7, 其设计数据如下:

$$\lambda_1 = 0.824, \lambda_2 = 0.625, \beta_1 = 53.3^\circ, (\beta_2 = 90^\circ), \\ \Omega = 1.08, t/c = 0.821$$

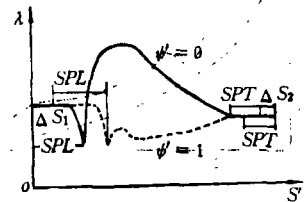


图3  $\lambda$  沿弧长分布示意图

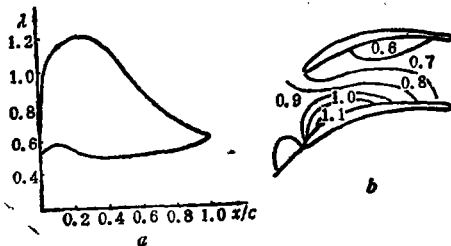


图4 SKG2.7叶栅设计速度沿弦长分布(a)和速度场分布(b)

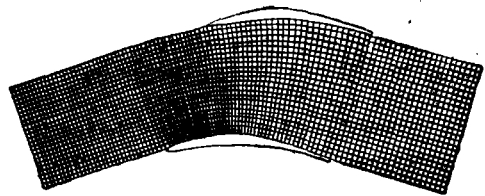


图5 变换到物理面上的SKG2.7设计计算网格

该叶型设计速度分布见图4a<sup>[1]</sup>, 其所在截面为典型的高负荷压气机静子根部截面, 叶背速度峰值 $\lambda_{\max} = 1.20$ , 超音区占弦长40%左右。在通过吸力面峰值后, 气流以大压力梯度等熵地减速到尾缘, 从而在设计状态下能避免较强的激波损失和叶型损失。取设计网格为 $120 \times 19$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ 。流场速度分布见图4b, 变换到物理面上的正交计算网格见图5。

2. 某型发动机压气机静子截面BC-6叶型, 其设计参数为:  $\lambda_1 = 0.844$ ,  $\lambda_2 = 0.601$ ,  $\beta_1 = 43.9^\circ$ , ( $\beta_2 = 65.7^\circ$ ),  $\Omega = 1.0$ ,  $t/c = 0.739$ 。该叶型表面设计速度分布见图6c, 峰值为 $\lambda_{\max} = 1.165$ , 位置约在15%弦长处, 设计叶型与原叶型相比(图6a), 两者轮廓基本重合。

3. 某压气机静子截面大弯度叶型, 其设计参数为:  $\lambda_1 = 0.7973$ ,  $\lambda_2 = 0.475$ ,  $\beta_1 = 45.57^\circ$ , ( $\beta_2 = 86.44^\circ$ ),  $\Omega = 1.05$ ,  $t/c = 0.531$ 其设计速度分布见图6d,  $\lambda_{\max} = 1.156$ 。最终设计的叶型与原叶型对比(图6b)两者吻合较好。

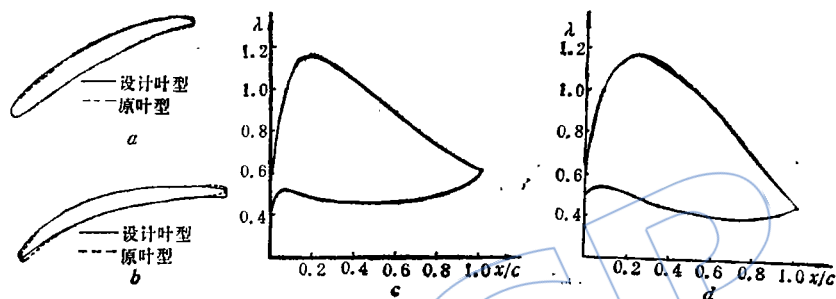


图6 BC-6叶型和某大弯度叶型的设计 $\lambda$ 数分布(c)和(d)以及设计叶型与原叶型对比(a)和(b)

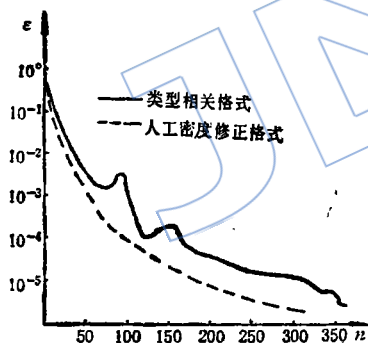


图7 两种格式收敛过程比较(SKG2.7叶型)

图7给出了设计SKG2.7叶型时, 相关格式与人工密度格式误差收敛情况的比较。可以看出: 采用相关格式时, 误差收敛为一波动过程, 而用人工密度修正格式时, 误差下降较快且平稳。

由以上三种叶型设计的结果表明: 本文提出的计算格式具有较好的精确度和适用范围, 并具有全场算法统一, 易于编程, 收敛过程稳定等优点。因此, 本方法可用于高负荷、低损失平面跨音速叶型的初始设计。通过引入轴向速度密流比, 可在一定程度上修正附面层尾迹及流管收缩的影响。

承蒙周新海、严汝群教授审阅此文, 特致谢忱。

#### 参考文献

- [1] Schmidt, E., "Computation of Supercritical Compressor and Turbine Cascade with a Design Method for Transonic Flows". ASME-79-GT-30.
- [2] Bauer, F., Garbedion, P and Korn, D., "Supercritical Wing Sections" Lecture Notes in Economics and Mathematics System, Springer-Verlag, New York, Section Vol.66, 108, 150, 1972, 1975, 1977.
- [3] Sobieczky, H et al "New Method for Designing Shock Free Transonic Configurations" AIAA Journal, Vol.17, No.7, July, 1978.
- [4] Hafez, M et al, "Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equations," AIAA Journal, Vol 17, No.8, Aug. 1979.

(责任编辑 冯毓诚)

and the changes of characteristics in main flow region may be a vital factor to improve the engine performance. A comparative study of several end-bend patterns shows that the character of redistribution differs for each from other. It is important to choose the end-bend pattern suitable for the specific compressor.

## APPLICATION OF AN ARTIFICIAL DENSITY SCHEME OF POTENTIAL STREAM FUNCTION METHOD TO DESIGN OF AIRFOIL

Liu Bo

*(Northwestern Polytechnical University)*

### Abstract

A potential stream function method is applied to designing transonic airfoils. The flowfield is computed by solving the full potential equations with the aid of a relaxation method. An artificial density scheme has been developed to replace the type related scheme. As compared with the latter, the artificial density scheme employs an identical scheme in whole field and converges steadily. Numerical results show that this method is applicable to initial designing of compressor airfoils and provides a better approximation of the actual conditions by taking into account the effect of the axial-velocity-ratio.

## PROFAN DESIGN BY PROPELLER-NACELLE INTERACTION ANALYSIS

Zhu Nianguo, Chen Maozhang, Niu Daozhi

*(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)*

### Abstract

A propeller-nacelle interaction analysis has been developed in this paper as a kind of lifting line analysis. It represents the blades by curved lifting lines, taking into consideration the blade sweep and the effect of the nacelle on the propfan flowfield. The wake model assumes that the vortex filaments occur along stream surfaces. Some corrections have been made to transonic portion of the blade and large solidity cascade portion at hub. Comparison of the results of the design and analysis with those given in references show the method is feasible and effective. Aspects of its improvement are also discussed.